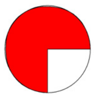
Grundwissen 6. Jahrgangsstufe

Im Folgenden werden wir an Hand von einigen uns selbst gestellten Fragen, die wir auch gleich beantworten wollen, die wichtigsten Grundbegriffe zu „Brüchen“ wiederholen, die du in der 6. Klasse kennengelernt hast:

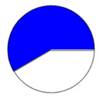
1) Was ist ein Bruch?

Antwort: Im normalen rechnerischen Umfeld erkennen wir gewöhnliche Brüche durch ihre besondere Darstellung, wie z.B. $\frac{3}{4}$. *Zähler* (3), *Bruchstrich* und Nenner (4) liest man hier zusammen als „drei Viertel“ und kann sich dies als 3 Anteile von 4 vorstellen. → 2 Beispiele:

$\frac{3}{4}$ einer Torte sind rot markiert



$\frac{7}{12}$ einer Torte sind blau markiert



Achtung: Im Nenner eines Bruches darf nie die Null stehen !!

2) Wie berechne ich Bruchteile natürlicher Zahlen?

Antwort: Nehmen wir zum Beispiel „$\frac{7}{12}$ von 2400“. Gemeint ist damit, dass wir zuerst den zwölften Teil von 2400 ausrechnen und dann das Ergebnis mal 7 nehmen. Die erste Rechnung lautet:

$2400 : 12 = 200$ und die zweite: $7 \cdot 200 = 1400$, also bekommt man: $\frac{7}{12}$ von $2400 = \underline{1400}$.

Hätte obige Torte die Masse 2,4 kg, so müsste das blaue Stück die Masse 1,4 kg besitzen.

3) Warum gibt es so viele Bezeichner für ein und denselben Bruch?

Antwort: Zuerst erinnern wir uns, dass z.B. gilt: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \ldots$ Veranschaulicht am „roten Tortenstück“ heißt dies: Wenn wir von 4 Tortenstücken 3 rote betrachten, bekommen wir dasselbe, falls jedes der Einzelstücke z.B. noch halbiert würde: Insgesamt hätten wir dann 8 Stücke, davon 6 rote, also: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$. Singgemäß gilt nach einem Dritteln der Einzelstücke: $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$. Daraus folgt die allgemeine Regel für das *Erweitern* und *Kürzen* von Brüchen (als Formeln):

Erweitern von Brüchen:	$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}$	→ Beispiel: $\frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 9}{12 \cdot 9} = \frac{63}{108}$
Kürzen von Brüchen:	$\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$	→ Beispiel: $\frac{156}{204} = \frac{156:12}{204:12} = \frac{13}{17}$

Man sieht, dass das Kürzen erstens nicht immer gehen muss und zweitens meistens schwieriger ist.

4) Warum kann man Brüche als „neue Zahlen“ bezeichnen?

Antwort: Wir machen uns dies an Hand von folgender Aufgabe klar: Gesucht ist eine *Zahl,* die mal 4 genommen 9 ergeben soll! Es kann wohl *keine natürliche* Zahl sein. Wir definieren nun den Bruch $\frac{9}{4}$ als die gesuchte *Zahl*. Im Tortenbeispiel hätten wir für unsere *neue Zahl* 2 ganzen Torten (= $\frac{8}{4}$ Torten) und $\frac{1}{4}$ Torte als Veranschaulichung. Nehmen wir diese „Zahl“ mal 4, so haben wir als Ergebnis 8 ganze Torten und 1 Torte (= $\frac{4}{4}$) dazu, also wie gewünscht: 9 Torten! Wir folgern daraus ein wichtiges

Merke: $\frac{a}{b} \cdot b = a$

Auf unser Beispiel übertragen: $\frac{9}{4} \cdot 4 = 9$

Gleichwertig damit ist:

Merke: $a : b = \frac{a}{b}$

Auf unser Beispiel übertragen: $9 : 4 = \frac{9}{4}$.

5) Was versteht man unter „Stammbrüchen“, „echten Brüchen“ und „gemischten Brüchen“?

Antwort: Bei *Stammbrüchen* steht eine 1 im Zähler und eine natürliche Zahl im Nenner. → Beispiel: $\frac{1}{7}$

Bei *echten Brüchen* ist der Nenner größer als der Zähler. → Beispiel: $\frac{3}{5}$

Bei *gemischten Brüchen* gibt es einen ganzzahligen Anteil. → Beispiel: $22\frac{3}{4}$

6) Wie vergleicht man die Größe von Brüchen miteinander?

Antwort: Wollen wir z.B. wissen, welcher der Brüche $\frac{13}{40}$ oder $\frac{7}{25}$ der größere ist, stellen wir zuerst den kleinstmöglichen gemeinsamen Nenner her, das sogenannte *kleinste gemeinsame Vielfache* der beiden Nenner, kurz *kgV.* Durch „Probieren" finden wir: kgV(40,25) = 200.

Dann bringen wir jeden der beiden Brüche durch *Erweitern* auf den *Hauptnenner* 200:

$\frac{13}{40} = \frac{13 \cdot 5}{40 \cdot 5} = \frac{65}{200}$ und $\frac{7}{25} = \frac{7 \cdot 8}{25 \cdot 8} = \frac{56}{200}$. Die „5" und die „8" beim Erweitern heißen auch *Erweiterungsfaktoren.* Man sieht nun sofort, dass $\frac{13}{40} > \frac{7}{25}$ sein muss.

7) Wie kann ich das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) für 2 natürliche Zahlen berechnen?

Antwort: Unter [6] haben wir die Vielfachen der jeweiligen Nenner im Kopf bestimmt, dann das kleinste gemeinsame Vielfache einfach herausgesucht. Sind die Zahlen komplizierter, geht das nicht mehr. Nehmen wir als Beispiel: kgV(6048, 3528) = ?
Bestimme jetzt die *Primfaktorzerlegungen* der Zahlen 6048 und 3528:
$6048 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$ und $3528 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2$. Dann ist kgV(6048, 3528) = $2^5 \cdot 3^3 \cdot 7^2$ = $\underline{42336}$

8) Wie rechne ich mit Brüchen?

Antwort: a) Addition: Kürze die Brüche, soweit sinnvoll, stelle durch Erweitern auf das kgV den Hauptnenner her und addiere dann die neuen Zähler; dann nochmals kürzen (falls möglich).

→ Beispiel: $\frac{13}{24} + \frac{15}{48} = \frac{26}{48} + \frac{15}{48} = \frac{41}{48}$

b) Subtraktion: Sinngemäßes Vorgehen, wie bei der Addition (nur „Minus" statt „Plus").

c) Multiplikation: Kürze die Brüche, dann Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner und nochmals kürzen (falls möglich) → Beispiel: $\frac{72}{48} \cdot \frac{13}{39} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}$

d) Division: Multipliziere mit dem *Kehrbruch* (Zähler und Nenner vertauscht).

→ Beispiel: $\frac{23}{4} : \frac{46}{64} = \frac{23}{4} \cdot \frac{64}{46} = \frac{23 \cdot 32}{4 \cdot 23} = \frac{32}{4} = 8$

Merke: ***a)*** $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot \frac{kgV}{b} + c \cdot \frac{kgV}{d}}{kgV}$ ***b) sinngemäß mit „Minus"***

c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ ***d)*** $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

→ wobei jeweils $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ schon gekürzt sind und für kgV(b,d) kurz kgV geschrieben wird.

Beim Addieren (a) sind nun die natürlichen Zahlen $\frac{kgV}{b}$ und $\frac{kgV}{d}$ die *Erweiterungsfaktoren.*

8) Was versteht man unter endlichen Dezimalbrüchen?

Antwort: Endliche Dezimalbrüche sind die „Kommadarstellung" von Zahlen. Beispiel: 4,789.
Die *Nachkommastellen* beschreiben spezielle Bruchteile, genauer ist 4,789 = $4 + \frac{7}{10} + \frac{8}{100} + \frac{9}{1000}$,
oder auch: 4,789 = $\frac{4789}{1000}$. Endliche Dezimalbrüche sind also eine andere Schreibform für Brüche, die so dargestellt werden können, dass sie eine Stufenzahl als Nenner besitzen.

9) Wie habe ich die unendlichen Dezimalbrüche einzuordnen?

Antwort: Man unterscheidet *unendlich periodische* und *unendlich nichtperiodische* Dezimalbrüche.
Beispiel zur 1. Sorte: $4,\overline{732}$. Beispiel zur 2. Sorte: 1,23456789101112131415....
Bei der 1. Sorte gibt der *Periodenstrich* an, welche Ziffern sich immer wiederholen: $4,\overline{732}$ = = 4,732732732732732732 .... Die unendlich periodischen Dezimalbrüche können als gewöhnliche Brüche dargestellt werden (!), die unendlich nichtperiodischen Dezimalbrüche dagegen nicht (es sind völlig neue Zahlen). Z.B. ist $4,\overline{732}$ = $4\,\frac{244}{333}$. Umgekehrt hat jeder gewöhnliche vollständig gekürzte Bruch, dessen Nenner nicht nur die Primfaktoren 2 und 5 enthält, immer eine periodische Dezimalbruchdarstellung, die wir durch Division von Zähler und Nenner finden können: → Beispiel: $\frac{3}{7} = 3 : 7 = 0,\overline{428571}$

10) **Wie rechnet man mit Dezimalbrüchen?**

Antwort: Wir schauen uns dies exemplarisch an:

a) Addition:

$$\begin{array}{r} 24,87993 \\ +\ 1443,23 \\ \hline 1468,10993 \end{array}$$

Zahlen am Komma ausrichten und dann addieren.

b) Multiplikation:

$$\begin{array}{r} \underline{1,27 \cdot 0,0045} \\ 508 \\ \underline{635} \\ 0,005715 \end{array}$$

Also Zahlen ohne Beachtung des Kommas multiplizieren, dann eventuell Nullen vor dem Ergebnis einfügen, so dass man genauso viele Nachkommastellen bekommt wie die Faktoren zusammen (hier 1. Faktor: 2, 2. Faktor: 4, Ergebnis: 6)

c) Division:

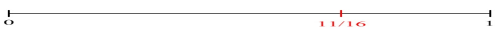
$$\begin{array}{l} 119,296 : 5,12 = \\ 11929,6 : 512 = 23,3 \\ \underline{1024} \\ \ \ 1689 \\ \ \ \underline{1536} \\ \quad\ 1536 \\ \quad\ \underline{1536} \\ \quad\ \ ---- \end{array}$$

Zuerst Komma in Dividend und Divisor verschieben, so dass der Divisor eine natürliche Zahl wird, dann normal dividieren und bei „Überschreiten des Kommas“ auch im Ergebnis Komma setzen. Wenn die Division nicht „aufgeht“ rechnen wir so lange weiter, bis wir die Periode erkennen (siehe 9)

11) **Wie trage ich Brüche richtig auf dem Zahlenstrahl ein?**

Antwort: Liegt die 1-er Marke z.B. 10 cm vom Ursprung entfernt, so rechnen wir für den einzutragenden Bruch $\frac{11}{16}$ wie folgt: $\frac{11}{16}$ ***von*** 10 cm $= \frac{11}{16} \cdot 10$ cm $= \frac{110}{16}$ cm $= 6{,}875$ cm. Die Marke ist also ungefähr 6,9 cm vom Ursprung entfernt.

Merke: „***von***“ wird durch „•“ ersetzt!



12) **Was versteht man unter „Prozent“?**

Antwort:

Merke: $1\% = \frac{1}{100}$

Und damit ist die Prozentrechnung ein Teil der Bruchrechnung.

→ **Beispiel:** Von 500 zufällig für eine Befragung ausgewählten Menschen waren 25% über 50 Jahre alt. Dann sind dies 25% von 500 $= \frac{25}{100} \cdot 500 = \frac{1}{4} \cdot 500 = 500:4$ $= 125$ (Menschen).

13) **In welcher Menge finden die Brüche ihren Platz?**

Antwort:

Merke: Alle Brüche (positiv und negativ) einschließlich der Null fasst man in der Menge $\mathbb{Q}$ zusammen und nennt sie „Menge der rationalen Zahlen“.

Beachte, dass die Brüche auf dem Zahlenstrahl insofern „dicht“ liegen, dass es zu jeweils 2 verschiedenen Brüchen (egal wie nah sie beieinander stehen!) immer einen Bruch gibt, der dazwischenliegt. Umso überraschender ist es, dass auf dem Zahlenstrahl noch Platz ist für eine weitere riesige Menge neuer Zahlen, die sogenannten „irrationalen Zahlen“ (es sind dies nichts anderes als die unendlichen nichtperiodischen Dezimalbrüche).

14) **Was versteht man unter „Relativer Häufigkeit“?**

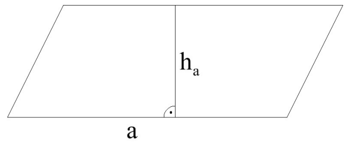
Antwort: Bei Zufallsexperimenten, wie etwa dem Würfelwurf, tritt ein bestimmtes Ergebnis (z.B. Würfeln einer 6) immer wieder auf. Führen wir das Experiment n-mal durch und bekommen dabei das gewünschte Ergebnis k-mal, so sagt man: Die *relative Häufigkeit* des Ergebnisses bei dieser Abfolge von Experimenten beträgt $\frac{k}{n}$ → Beispiel: Bei 1000-maligem Würfeln 170-mal die 6 gewürfelt: Relative Häufigkeit dieses Ergebnisses bei der vorliegenden Versuchskette:

$\frac{170}{1000} = \frac{17}{100} = 17\%$.

Und nun noch einige geometrische Grundtatsachen:

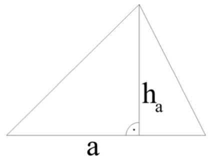
Der ***Flächeninhalt eines Parallelogramms*** beträgt:

$$A = a \cdot h_a$$



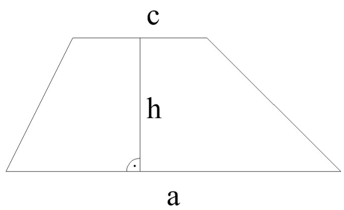
Der ***Flächeninhalt eines Dreieckes*** beträgt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

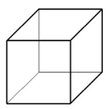


Der ***Flächeninhalt eines Trapezes*** beträgt:

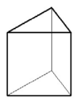
$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$$



Um sich einen Körper räumlich besser vorstellen zu können, zeichnet man von ihm ein ***Schrägbild:***



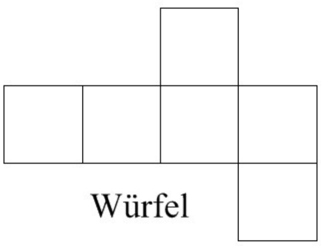
Würfel

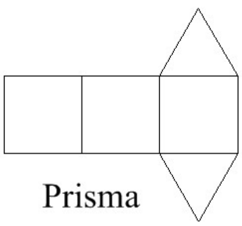


Prisma

Wird die Oberfläche eines Körpers längs geeigneter Kanten aufgeschnitten und in die Zeichenebene ausgebreitet, so erhält man das ***Netz*** eines Körpers:

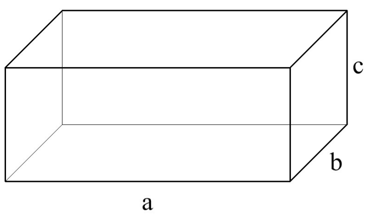
Der ***Oberflächenhalt O*** eines Körpers
ist gleich dem Flächeninhalt seines Netzes.





Für das ***Volumen*** eines Quaders gilt:

$$V = a \cdot b \cdot c$$



Umrechnung der Volumeneinheiten:

$1\,m^3 = 1000\,dm^3$

$1\,dm^3 = 1000\,cm^3$

$1\,cm^3 = 1000\,mm^3$